جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب :
كلية العلوم	الفصل الثالث للعام 2013 /2014	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : **(تمنع الآلة الحاسبة)**

السؤال الأول(35 درجة): (أ) – إذا كان للدلة f مشتقاً محدوداً على الفترة $[a,b]$ (المغلقة و المحدودة في جميع الأسئلة) ، فأثبت أنها تكون ذ ت م ، ثم استنتج أنها قيوسة عليها.

- بين أن الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ذ ت م على $[0,2]$ ، وناقش هل يلزم كون مشتقها محدوداً على هذه الفترة أن تكون ذ ت م ، و ما هو تغيرها الكلي على نفس الفترة.

(ب) – ادرس الاستمرار المطلق للدالة: $g(x)=\frac{1}{x}$ على الفترة $[1,3]$ و كذلك المحدودية تقريباً لها في كل مكان على $\Re$ ، ثم أوجد دالة التغير لها على تلك الفترة.

السؤال الثاني(30 درجة): (أ) – إذا كانت $S_k\ (k=1,2,...)$ أسرة من الجبور التامة في $X\neq\phi$ ، فأثبت أن $S=\bigcap_k S_k$ جبراً تاماً في X .

- ابحث مع التعليل في كون صف المجموعات المحدودة في $\Re$ ، جبر ، جبر تام ؟ ،

(ب) – بين أن الدالة المميزة للمجموعة $A\subseteq[a,b]$ (حيث A مقيسة من هذه الفترة) كمولة لوبيغياً على الفترة $[a,b]$ ، ثم أحسبه(أي: $(L)\int_{[a,b]} I_A(x)d\lambda=$) .

السؤال الثالث(35 درجة): (أ) – أحسب التغير الكلي للدالة على الفترة $[0,10]$ و المعرفة بالشكل :

$$\varphi(x)=\begin{cases} -2 & ; \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & ; \quad 1<x\le 3 \\ 2 & ; \quad 3<x<10 \\ 5 & ; \quad x=10 \end{cases}$$

ثم أحسب التكامل الآتي علماً أنه موجوداً :

$$J=(S)\int_0^{10} x^2\, d\,\varphi(x)$$

(ب) – إذا كان $\lambda(E)=0$ ، عندئذ أثبت أن كل دالة h معرفة على E تكون قيوسة عليها .

- علل هل المجموعة Q بوريلية و مقيسة ؟ و ما هو قياس ليبغ للمجموعات : $]5,6[$, Q , $\{2014\}$.

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

حمص في 2014/8/19 **مدرس المقرر: د.محمد عامر**

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

توزيع درجات مقرر دوال حقيقية [illegible]
الدورة الإضافية للعام $\frac{2013}{2014}$
سنة ثالثة - رياضيات

الدرجة: 100

السؤال الأول (35°)

أ) لدينا: الدالة [illegible] $|f'(x)| \le L \; ; x \in [a,b] \; (or \;]a,b[) \; (L>0)$

ومن أجل $a \le x_1 < x_2 \le b$ وحسب مبرهنة لاغرانج توجد نقطة $z \in (x_1, x_2)$ بحيث يكون

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(z)(x_2 - x_1)$$

ومن ثم [illegible] من أجل $x_1, x_2 \in [a,b]$

$$|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(z)||x_2 - x_1| \le L|x_2 - x_1|$$

وهذا يعني أن f تحقق شرط ليبشتز [illegible] $L>0$ على $[a,b]$ وحسب مبرهنة [illegible] ذات تغير محدود.

- ولكن العكس غير صحيح [illegible] $[a,b]$ [illegible] (أو بكلام آخر [illegible])

9

* مثال: $f(x) = \sqrt[5]{x}$ متزايدة تماماً حسب تعريف (التزايد تماماً) [illegible] $[0,2]$

- لنوجد مستمرة على الفترة $[0,2]$،

$$V_0^2(\sqrt[5]{x}) = \sqrt[5]{2} - \sqrt[5]{0} = \sqrt[5]{2} > 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}x^{-\frac{2}{5}} & ; x \in]0,2] \\ \infty & ; x = 0 \end{cases}$$

وهذا يعني أن مشتقة ليست محدودة [illegible] ليبشتز [illegible]، مع ذلك [illegible] ذات تغير محدود.

ب) الاستمرار المطلق لـ g: لدينا

$g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ [illegible] $]1,3[$ أو $[1,3]$ وهي محدودة [illegible] $|g'(x)| \le \frac{1}{1} = 1$ أي أنه [illegible] $x \in [1,3]$ [illegible] شرط ليبشتز [illegible] $[1,3]$ [illegible] $\mathbb{R}$ [illegible]

5

[illegible] $\mathbb{R}$ [illegible] المجموعة $\{0\}$ [illegible] $(\lambda(\{0\}) = 0)$

دالة التغير [illegible] g متناقصة تماماً على $[1,3]$ [illegible] $[1,3]$ [illegible]:

$$V_1^x(g) = \sup_P \sum |g(1) - g(x)| = \sup_P \left|1 - \frac{1}{x}\right| = \frac{x-1}{x}$$

$$v_g(x) = \begin{cases} V_1^x(g) & ; 1 < x \le 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

$$v_g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x} & ; 1 < x \le 3 \\ 0 & ; x = 1 \end{cases}$$

دالة التغير المنشورة.

← يتبع

السؤال الثاني (30°) أ) - علينا إثبات أن $S=\bigcap_k S_k$ جبر σ على X.

لذا نتحقق الشروط، حيث أن $\phi, X \in S_k$ ولذلك $\bigcap_k S_k \ni$ $(k=1,2,\ldots)$

حيث أن $E_1, E_2, \ldots \in S_k$ (جبر σ) ولذلك $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in S_k$ وبالتالي

فإن $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \bigcap_k S_k$ والشرط (2) محقق

حتى لو كان $E \in S_k$ فإن $\tilde{E} \in S_k$ بمعنى إذا كان $E \in \bigcap_k S_k$ فإن $\tilde{E} \in \bigcap_k S_k$

حيث $\tilde{E} = X - E$.

وبالشرط (3) محقق وهذا يعني أن S جبر σ على X.

17

- هل أن جملة المجموعات المحدودة في $\mathbb{R}$ جبر أم جبر σ أم ماذا؟

نذكر أن ϕ مجموعة محدودة في $\mathbb{R}$ لأنها محدودة في أي نقطة) ولكن $X=\mathbb{R}$ ليست محدودة، بمعنى أن صنف المجموعات المحدودة ليست جبراً لأنه $\not\ni \mathbb{R}$. ال هذا الصنف الأخير ليس مغلقاً تحت عملية المتمم أن أي من الشرط الأول لا يتحقق.

- وبالتالي لا يكون جبراً تماماً لأنه لا يكون جبراً تماماً للشرط أن $\mathbb{R}$ وهذا الشرط حسب ما سبق.

رابعاً) الدالة المميزة ...

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \in \tilde{A} \end{cases} \quad , \quad \tilde{A} = E - A = [a,b] - A$$

- مقيسة: بما أن A مقيسة فنلاحظ أن الدالة المميزة مقيسة على $[a,b]$. وفي الحقيقة دليلاً

13

$$E(I_A > c) = \begin{cases} E=[a,b] & ; c<0 \\ A & ; 0 \le c < 1 \\ \phi & ; c \ge 1 \end{cases}$$

إذاً المجموعة $E(I_A > c)$ مقيسة لأي عدد c في $\mathbb{R}$، وهذا يعني أن الدالة المميزة I_A مقيسة على $[a,b]$

- محدودة: لأنه محدودة لأن $|I_A(x)| \le 1 \; ; x \in [a,b]$

والفترة $[a,b]$ مقيسة ومقياسها هو: $\lambda([a,b]) = b-a < \infty$

وهذا يعني أن تكامل ليبيك لها موجود على $[a,b]$، وليست لغو،

$$\int_{[a,b]} I_A(x)\, d\lambda = \int_A I_A(x)\, d\lambda + \int_{\tilde{A}} I_A(x)\, d\lambda = \int_A 1 \cdot d\lambda + \int_{\tilde{A}} 0\, d\lambda$$

$$= \lambda(A).$$

وهو المطلوب.

(3)

السؤال الثالث (35°): (أ) ب: التغير الكلي لـ φ على $[0,10]$:

$$\overset{10}{\underset{0}{V}}(\varphi) = |\varphi(0+0)-\varphi(0)| + |\varphi(1)-\varphi(1-0)| + |\varphi(1+0)-\varphi(1)|$$
$$+ |\varphi(3)-\varphi(3-0)| + |\varphi(3+0)-\varphi(3)| + |\varphi(10)-\varphi(10-0)|$$
$$= |0| + |-2+2| + |0+2| + |0-0| + |2-0| + |5-2|$$
$$= 0 + 0 + 2 + 0 + 2 + 3 = 7$$

[illegible] $[0,10]$ [illegible]

حيث نقاط $1=\varphi$ ، $(3,0)$ [illegible] $0<1<3<10$

[illegible] $[0,10]$

ب: التكامل [illegible] موجود

$f(x)=x^2$

(20) $\int_0^{10} x^2\, d\varphi(x) = f(0)\,[\varphi(0+0)-\varphi(0)] + f(1)\,[\varphi(1+0)-\varphi(1-0)] + f(3)\,[\varphi(3+0)-\varphi(3-0)] + f(10)\,[\varphi(10)-\varphi(10-0)]$

$= 0[-2+2] + 1[0+2] + 9[2-0] + 100[5-2] = 2+18+300 = 320$

إثبات: h [illegible] E [illegible] $\lambda(E)=0$ ، E [illegible]

[illegible] $E(h>c) \subseteq E \Rightarrow \lambda\{E(h>c)\} \le \lambda(E)=0$

[illegible] $\lambda\{E(h>c)\}=0$ [illegible] λ [illegible]

(15) [illegible] h [illegible] E [illegible] $\lambda(E)=0$.

- Q [illegible]

[illegible] $\mathbb{R}$ [illegible]

[illegible] $\lambda(\{2014\})=0,\ \lambda(Q)=0,\ \lambda([5,6[)=6-5=1$

أستاذ المقرر

د. محمد عامر

[illegible]

في ١٩/[illegible]/٢٠١٤

جامعة البعث	امتحان مقرر الدوال محدودة التغير	اسم الطالب :
كلية العلوم	الفصل الثاني للعام 2013 /2014	الدرجة : 100
قسم الرياضيات	السنة الثالثة - رياضيات	المدة : 90 دقيقة

أجب عن الأسئلة التالية مع مراعاة الترتيب في ورقتك : (تمنع الآلة الحاسبة)

السؤال الأول(50 درجة): (أ) - إذا كانت f دالة ذ ت م على $[a,b]$،فاثبت باستخدام التعريف أن كلا من الدالتين: $|f|$ ، $(-f)$ ذ ت م على نفس الفترة ، مع ذكر التغير الكلي لواحدة منهما على $[a,b]$.

(ب) - 1- اكتب صيغةالدالة : λ^* ،و منه أوضح أن قياس المجموعة وحيدة العنصر $\{a\}$ يساوي الصفر وفق λ^* هذه ، و استنتج أنها مقيسة .

2-أثبت أن الدالة : $\mu(E)=0$ هي قياساً متزايداً على الجبر التام S على X غير الخالية (بعد ذكر شروط القياس)، و ادرسه من حيث أنه : منته ، σ - منته و لماذا ؟ .

(ج) -تأكد من وجود تكامل ستيلجس التالي:

$$J=(S)\int_0^2\left(\frac{1}{x^2+1}\right)d\left([x]+3\right)$$

ثم احسبه في حال وجوده .

السؤال الثاني(50 درجة): (أ) -لتكن f دالة كمولة ريمانيا على $[a,b]$ ، فاثبت أن الدالة : $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt;\ x\in[a,b]$ مستمرة مطلقا على $[a,b]$ باستخدام التعريف .

(ب) - 1- علل فيما إذا كانت الدالة : $h(x)=\arctan 3x$ تحقق شرط ليبشتز على $[1,4]$ ، و ماذا نعني بقياس ليبيغ على $\Re$ ، و ما هو قياس ليبيغ لكل من المجموعات : $\{9\}$ ، $\Re-N$ ، $\Re$.

2- هل الصف : $A=\{\phi,\Re,]-\infty,0],]0,\infty[\}$ جبرا تاما- صفا مطردا ؟ و لماذا ؟ .

(ت) - ابحث في وجود تكامل ليبيغ لدالة ديريخليه على الفترة $[2,\sqrt{7}]$ (بعد كتابة صيغتها) بدون حساب .

- اثبت أن متتالية الدوال : $f_n(x)=x^n$, $n\ge 1$ متقاربة تقريبا في كل مكان على الفترة $[0,1]$ من دالة يطلب تعيينها .

انتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق و النجاح

مدرس المقرر: د.محمد عامر

حمص في 2014/6/25